TITLE:

パンルヴェ方程式のベックルント変換群の階層 (複素領域における微分方程式の大域解析と漸近解析)

AUTHOR(S):

鈴木, 正樹; 田原, 伸彦; 高野, 恭一

CITATION:

鈴木, 正樹 ...[et al]. パンルヴェ方程式のベックルント変換群の階層 (複素領域における微分方程式の大域解析と漸近解析). 数理解析研究所講究録 2004, 1367: 126-133

ISSUE DATE:

2004-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/25391

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 126-133

パンルヴェ方程式のベックルント変換群の階層

神戸大学・自然科学研究科 鈴木正樹 (Masaki Suzuki)
田原伸彦 (Nobuhiko Tahara)
Graduate School of Science and Technology
Kobe University
神戸大学・理学部 高野恭一 (Kyoichi Takano)
Faculty of Science
Kobe University

§1. 内容の概略

各パンルヴェ方程式は (正確にはそれと同値なハミルトンの正準方程式は)、方程式の形は変えないで、方程式に含まれるパラメータを変えるベックルント変換群を許す (参考文献 [2])。本稿の目的は、それら変換群全体に階層構造があること、すなわち、良く知られた方程式の退化操作が変換群の退化をも引き起こしているを確かめることである。

6個のパンルヴェ方程式はそれぞれ多項式ハミルトンニアンの正準方程式

$$P_J: \qquad \delta_J q = \{H_J(q,p,t,\alpha),q\}, \quad \delta_J p = \{H_J(q,p,t,\alpha),p\},$$

$(J = VI, V, IV, III, II, I)$ と同値である。(この正準方程式を第 J パンルヴェ系という。) ここで

$$\delta_{VI} = t(t-1)\frac{d}{dt}, \quad \delta_V = \delta_{III} = t\frac{d}{dt}, \quad \delta_{IV} = \delta_{II} = \delta_I = \frac{d}{dt}$$

で、$\{\cdot,\cdot\}$ は

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$$

で定義されるポアソン括弧である。各ハミルトンニアンは変数 q,p,t とパラメター $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ の多項式である。本稿で予定している説明に必要なものだけをいく

つか与えておこう：

$$\begin{aligned} H_{VI}(q,p,t,\alpha) =& q(q-1)(q-t)p^2 - [(\alpha_0-1)q(q-1)+\alpha_4(q-1)(q-t) \\ & +\alpha_3 q(q-t)]p + \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)(q-t) \\ & (\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1), \\ H_V(q,p,t,\alpha) =& q(q-1)p(p+t) - (\alpha_1+\alpha_3)qp + \alpha_1 p + \alpha_2 tq \\ & (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1), \\ H_{IV}(q,p,t,\alpha) =& qp(2p-q-2t) - 2\alpha_1 p - \alpha_2 q \\ & (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=1). \end{aligned}$$

ここで H_{IV} は [2] のものと係数が若干異なるが、それは退化操作として通常用いられているもの (例えば [1],[4] に載っているもの) を採用するからである。

各パンルヴェ系 P_J $(J \neq I)$ のベックルント変換群 $W = W_J$ とは、微分が P_J によって定義される $q, p, t, \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ...)$ の微分函数体 K (例えば有理函数体) の微分同型 (微分と可換な体同型という意味) でポアソン括弧を保つものからなる群である。これより各元は P_J の形は変えず、パラメータ $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ...)$ を変えるが、単純ルートと見なされるパラメータにはあるアフィン・ワイル群として作用する。例えば W_{VI} は $D_4^{(1)}$ 型、W_V は $A_3^{(1)}$ 型、W_{IV} は $A_2^{(1)}$ 型である ([2])。

ところで良く知られているように、パンルヴェ系全体には退化操作による階層構造がある。すなわち各 $(J,K) = (VI,V),(V,IV),(V,III),(IV,II),(III,II),(II,I)$ に対して、小さいパラメータ ε を含む変換

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \alpha_i(A,\varepsilon) \quad (i=0,1,...), \\ &t = t(\varepsilon, T), \quad q = q(A,\varepsilon,T,Q,P), \quad p = p(A,\varepsilon,T,Q,P) \end{aligned}$$

が存在し、これをパンルヴェ系 P_J に施したものを $P_{J\to K}$ とすると、$\varepsilon \to 0$ のとき $P_{J\to K}$ が P_K に収束する。(この変換は (q,p) から (Q,P) への正準変換であるので $P_{J\to K}$ もハミルトンの正準方程式である。)

さてベックルント変換群 W_J は上の変換によって $Q,P,T,A=(A_0,A_1,...),\varepsilon$ の微分函数体に働く変換群と見なせる。それをまた W_J と表すことにする。このとき W_J の各元である変換は $\varepsilon \to 0$ のとき一般には収束しない。そこで W_J の部分群 $W_{J\to K}$ をうまく選んでその極限が W_K となるように出来ないかということが問題になる。それが可能であるというのが、本稿の主張である。結論からいうと、$W_{J\to K}$ としては A_i $(i=0,1,...)$ の鏡映によって生成される群をとれば良い。

以上から、ベックルント変換群 W_{VI} さえ知っていれば、他のベックルント変換群 W_J $(J=V,IV,III,II)$ はそれから形式的に得られるということになる。

第 I パンルヴェ系はパラメータを含まないから、ベックルント変換は方程式を全く変えない変換ということになる。このような変換群として、スケール変換である 5 次の巡回群が知られている。これ以外の非自明な変換が本稿の方法によって W_{II} から得られるのではないかと期待したが、極限はすべて恒等変換であった。西岡啓二氏によると、スケール変換以外のベックルント変換 (もちろん代数的変換) が存在しないことが、微分代数の方法で、証明されるということである。

以下では、$(J,K)=(VI,V),(V,IV)$ の場合を調べてみる。前者は退化変換が有理変換であるが、後者は代数的変換であるので注意が必要である。他の場合を込めた詳しいことはプレプリント [4] にある。

本稿のテーマは神戸大学理学部の庵原謙治氏が提起したものである。著者の計算にも多くの助言をしてくれた。ここに深く感謝いたします。

§2. W_{VI} から W_V へ

ベックルント変換群 W_{VI} は s_0,s_1,s_2,s_3,s_4 から生成される群で各 s_i は $\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1$ を満たす $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ と q,p,t に次のように作用する：

$$
\begin{aligned}
&s_0(\alpha_0)=-\alpha_0,\quad s_0(\alpha_1)=\alpha_1,\quad s_0(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_0,\quad s_0(\alpha_3)=\alpha_3,\quad s_0(\alpha_4)=\alpha_4,\\
&\quad s_0(q)=q,\quad s_0(p)=p-\alpha_0/(q-t),\quad s_0(t)=t,\\
&s_1(\alpha_0)=\alpha_0,\quad s_1(\alpha_1)=-\alpha_1,\quad s_1(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_1,\quad s_0(\alpha_3)=\alpha_3,\quad s_1(\alpha_4)=\alpha_4,\\
&\quad s_1(q)=q,\quad s_1(p)=p,\quad s_1(t)=t,\\
&s_2(\alpha_0)=\alpha_0+\alpha_2\quad s_2(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2,\quad s_2(\alpha_2)=-\alpha_2,\quad s_0(\alpha_3)=\alpha_3+\alpha_2,\\
&s_2(\alpha_4)=\alpha_4+\alpha_2,\\
&\quad s_2(q)=q+\alpha_2/p,\quad s_2(p)=p,\quad s_2(t)=t,\\
&s_3(\alpha_0)=\alpha_0,\quad s_3(\alpha_1)=\alpha_1,\quad s_3(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_3,\quad s_3(\alpha_3)=-\alpha_3,\quad s_3(\alpha_4)=\alpha_4,\\
&\quad s_3(q)=q,\quad s_3(p)=p-\alpha_3/(q-1),\quad s_3(t)=t,\\
&s_4(\alpha_0)=\alpha_0,\quad s_4(\alpha_1)=\alpha_1,\quad s_4(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_4,\quad s_4(\alpha_3)=\alpha_3,\quad s_4(\alpha_4)=-\alpha_4,\\
&\quad s_4(q)=q,\quad s_4(p)=p-\alpha_4/q,\quad s_4(t)=t
\end{aligned}
$$

またベックルント変換群 W_V は s_0,s_1,s_2,s_3 から生成される群で各 s_i は α_0+

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ を満たす $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ と q,p,t に次のように作用する：

$$
\begin{aligned}
&s_0(\alpha_0)=-\alpha_0,\quad s_0(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_0,\quad s_0(\alpha_2)=\alpha_2,\quad s_0(\alpha_3)=\alpha_3+\alpha_0,\\
&\quad s_0(q)=q+\alpha_0/(p+t),\quad s_0(p)=p,\quad s_0(t)=t,\\
&s_1(\alpha_0)=\alpha_0+\alpha_1,\quad s_1(\alpha_1)=-\alpha_1,\quad s_1(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_1,\quad s_0(\alpha_3)=\alpha_3,\\
&\quad s_1(q)=q,\quad s_1(p)=p-\alpha_1/q,\quad s_1(t)=t,\\
&s_2(\alpha_0)=\alpha_0,\quad s_2(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2,\quad s_2(\alpha_2)=-\alpha_2,\quad s_2(\alpha_3)=\alpha_3+\alpha_2,\\
&\quad s_2(q)=q+\alpha_2/p,\quad s_2(p)=p,\quad s_2(t)=t,\\
&s_3(\alpha_0)=\alpha_0+\alpha_3,\quad s_3(\alpha_1)=\alpha_1,\quad s_3(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_3,\quad s_3(\alpha_3)=-\alpha_3,\\
&\quad s_3(q)=q,\quad s_3(p)=p-\alpha_3/(q-1),\quad s_3(t)=t
\end{aligned}
$$

さて P_{VI} から P_V への退化操作を行う変換は

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0=\varepsilon^{-1},\quad \alpha_1=A_3,\quad \alpha_2=A_2,\quad \alpha_3=A_0-A_2-\varepsilon^{-1},\quad \alpha_4=A_1,\\
&t=1+\varepsilon T,\quad (q-1)(Q-1)=1,\quad (q-1)p+(Q-1)P=-A_2
\end{aligned}
$$

である。

$$
\begin{aligned}
&\{P,Q\}=1,\quad \{Q,Q\}=\{P,P\}=0,\\
&A_0+A_1+A_2+A_3=\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1
\end{aligned}
$$

であることに注意する。上の変換より、W_{VI} の各元は $A=(A_0,A_1,A_2,A_3),\varepsilon,T,Q,P$ の有理函数体にどのように作用するかは簡単に分かる。例えば s_0 のパラメータ $A=(A_0,A_1,A_2,A_3),\varepsilon$ への作用は

$$
A_0=\alpha_0+\alpha_2+\alpha_3,\quad A_1=\alpha_4,\quad A_2=\alpha_2,\quad A_3=\alpha_1\quad \varepsilon=\frac{1}{\alpha_0}
$$

から

$$
\begin{aligned}
&s_0(A_0)=s_0(\alpha_0+\alpha_2+\alpha_3)=-\alpha_0+(\alpha_2+\alpha_0)+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3\\
&\quad =A_0-\varepsilon^{-1},\quad s_0(A_1)=s_0(\alpha_4)=\alpha_4=A_1,\\
&s_0(A_2)=s_0(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_0=A_2+\varepsilon^{-1},\quad s_0(A_3)=s_0(\alpha_1)=\alpha_1=A_3,\\
&s_0(\varepsilon)=s_0(1/\alpha_0)=-1/\alpha_0=-\varepsilon
\end{aligned}
$$

である。ここで例えば、$s_0(A_0),s_0(A_2)$ は $\varepsilon\to 0$ のとき発散することに注意する。他の s_i のパラメータへの作用も同様に計算する。$\varepsilon\to 0$ のときの極限においては、

A_0, A_1, A_2, A_3 は $A_3^{(1)}$ 型アフィン・リー代数のルートになるべきであるから、これらの鏡映となる W_{VI} を探すことにする。色々試してみると

$$S_0 := s_0s_2s_3s_2s_0 = s_3s_2s_0s_2s_3, \quad S_1 := s_4, \quad S_2 := s_2, \quad S_3 := s_1.$$

がそのようなものであることが分かる。計算により

$$\begin{aligned}
&S_0(A_0) = -A_0, \quad S_0(A_1) = A_1 + A_0, \quad S_0(A_2) = A_2,\\
&S_0(A_3) = A_3 + A_0, \quad S_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 - A_2\varepsilon},\\
&S_1(A_0) = A_0 + A_1, \quad S_1(A_1) = -A_1, \quad S_1(A_2) = A_2 + A_1,\\
&S_1(A_3) = A_3, \quad S_1(\varepsilon) = \varepsilon,\\
&S_2(A_0) = A_0, \quad S_2(A_1) = A_1 + A_2, \quad S_2(A_2) = -A_2,\\
&S_2(A_3) = A_3 + A_2, \quad S_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 - A_2\varepsilon},\\
&S_3(A_0) = A_0 + A_3, \quad S_3(A_1) = A_1, \quad S_3(A_2) = A_2 + A_3,\\
&S_3(A_3) = -A_3, \quad S_3(\varepsilon) = \varepsilon
\end{aligned}$$

を得る。

そこで上の S_0, S_1, S_2, S_3 が T, Q, P にどう作用するかを確かめると

$$\begin{aligned}
&S_0(T) = T(1 - A_0\varepsilon), \quad S_0(Q) = Q + \frac{A_0(1 - Q(Q-1)P\varepsilon)}{P + T - T(Q-1)P\varepsilon},\\
&S_0(P) = P\Big(1 + \frac{A_0T\varepsilon}{P + T - T(A_0 + QP)\varepsilon}\Big),\\
&S_1(T) = T, \quad S_1(Q) = Q, \quad S_1(P) = P - \frac{A_1}{Q},\\
&S_2(T) = T(1 + A_2\varepsilon), \quad S_2(Q) = Q + \frac{A_2}{P}, \quad S_2(P) = P,\\
&S_3(T) = T, \quad S_3(Q) = Q, \quad S_3(P) = P - \frac{A_3}{Q-1}.
\end{aligned}$$

これらの式と W_V の生成元の作用を示す式とを比較すれば、S_0, S_1, S_2, S_3 で生成される W_{VI} の部分群 $W_{VI\to V}$ の極限が W_V であることが分かる。

なお極限をとる前のハミルトン系 $P_{VI\to V}$ は $\delta_V := Td/dT, H_{VI\to V} := H_{VI}/(1 + \varepsilon T)$ とおくと

$$P_{VI\to V}: \qquad \delta_V Q = \{H_{VI\to V}, Q\}, \quad \delta_V P = \{H_{VI\to V}, P\}$$

と表され、$\varepsilon \to 0$ のとき $H_{VI\to V} \to H_V$ でかつ $w \in W_{VI\to V}$ に対して

$$\delta_V\, w(Q) = \{w(H_{VI\to V}), w(Q)\}, \quad \delta_V\, w(P) = \{w(H_{VI\to V}), w(P)\}$$

であることを注意しておく。これは次節で見る $(J,K) = (V, IV)$ の場合には若干異なる。

§3. W_V から W_{IV} へ

ベックルント変換群 W_V の具体的作用は前節で与えた。

ベックルント変換群 W_{IV} は s_0, s_1, s_2 から生成される群で各 s_i は $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 = 1$ を満たす $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ と q, p, t に次のように作用する：

$$\begin{aligned}
&s_0(\alpha_0) = -\alpha_0, \quad s_0(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_0, \quad s_0(\alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_0,\\
&\quad s_0(q) = q + 2\alpha_0/(2p - q - 2t), \quad s_0(p) = p + \alpha_0/(2p - q - 2t), \quad s_0(t) = t,\\
&s_1(\alpha_0) = \alpha_0 + \alpha_1, \quad s_1(\alpha_1) = -\alpha_1, \quad s_1(\alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_1,\\
&\quad s_1(q) = q, \quad s_1(p) = p - \alpha_1/q, \quad s_1(t) = t,\\
&s_2(\alpha_0) = \alpha_0 + \alpha_2, \quad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_2(\alpha_2) = -\alpha_2,\\
&\quad s_2(q) = q + \alpha_2/p, \quad s_2(p) = p, \quad s_2(t) = t.
\end{aligned}$$

P_V から P_{IV} への退化操作を行う変換は

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = A_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}, \quad \alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon^{-2},\\
&t = \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}(1 + 2\varepsilon T), \quad q = -\frac{\varepsilon Q}{1 - \varepsilon Q},\\
&p = -\varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon Q)[P - \varepsilon(A_2 + QP)]
\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}
&\{P, Q\} = 1, \quad \{Q, Q\} = \{P, P\} = 0,\\
&A_0 + A_1 + A_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1
\end{aligned}$$

に注意する。また $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t, q, t$ と $A_0, A_1, A_2, \varepsilon, T, Q, P$ の対応が 1:2 であることにも注意する。

先ず、$A_0 = \alpha_0 + \alpha_3, A_1 = \alpha_1, A_2 = \alpha_2$ の鏡映となる W_V の元を探す。

$$S_0 := s_3 s_0 s_3 = s_0 s_3 s_0, \quad S_1 = s_1, \quad S_2 = s_2$$

とおくと

$$S_0(A_0) = -A_0,\quad S_0(A_1) = A_1 + A_0,\quad S_0(A_2) = A_2 + A_0,$$
$$S_1(A_0) = A_0 + A_1,\quad S_1(A_1) = -A_1,\quad S_1(A_2) = A_2 + A_1,$$
$$S_2(A_0) = A_0 + A_2,\quad S_2(A_1) = A_1 + A_2,\quad S_2(A_2) = -A_2$$

であることが確かめられる。§2 での議論と同様にこれら S_0, S_1, S_2 が ϵ, T, Q, P にどのように作用するかを調べる。$S_i(\epsilon)$ が決まれば $S_i(T), S_i(Q), S_i(P)$ が決まるので、$S_i(\epsilon)$ について検討する。例えば

$$S_2(\varepsilon)^2 = s_2(\varepsilon^2) = s_2((-1/2)/\alpha_3) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_3+\alpha_2} = \frac{\varepsilon^2}{1-2A_2\varepsilon^2}$$

であるので、

$$S_2(\varepsilon) = \varepsilon(1-2A_2\varepsilon^2)^{-1/2}$$

となるべきであるが、$(1-2A_2\varepsilon^2)^{-1/2}$ の分枝をどう決めるかという不定性および $\epsilon \to 0$ とするとき分枝が唯一つに定まるかという問題がある。直観的には A_0, A_1, A_2 を任意に固定し、ε はそれに応じて十分に小さいものしか考えないとすれば良いが、S_i が作用する函数の空間を決めるために、

$$(1+x)^c \sim 1 + \sum_{n\geq 1}\binom{c}{n}x^n$$

に従って、$(1-2A_2\varepsilon^2)^{-1/2}$ は定数項が 1 の $A_2\epsilon^2$ の形式的巾級数と考えることにする。ϵ が小さいときはこの級数は収束し、$\epsilon \to 0$ のとき 1 に収束する。このような意味で $S_i(\epsilon)$ は

$$S_0(\varepsilon) = \varepsilon(1+2A_0\varepsilon^2)^{-1/2},\quad S_1(\varepsilon) = \varepsilon,\quad S_2(\varepsilon) = \varepsilon(1-2A_2\varepsilon^2)^{-1/2}$$

という分枝を選ぶことにする。

こうしておくと

$$S_0(T) = (T - A_0\varepsilon)(1+2A_0\varepsilon^2)^{-1/2},\quad S_1(T) = T,$$
$$S_2(T) = (T + A_2\varepsilon)(1-2A_2\varepsilon^2)^{-1/2}$$

を得る。さらに

$$S_1(Q) = Q,\quad S_1(P) = P - \frac{A_1}{Q}$$
$$S_2(Q) = Q + \frac{A_2}{P},\quad S_2(P) = P$$

が分かる。計算が面倒なのは $S_0 = s_3 s_0 s_3$ の Q, P の作用である。複雑な式であるので結果を書き下すのはしないが、$\varepsilon \to 0$ のとき

$$S_0(Q) \to Q + \frac{2A_0}{2P - Q - 2T}, \quad S_0(P) \to P + \frac{A_0}{2P - Q - 2T}$$

であることは容易に確かめられる。ただし $2P - Q - 2T \neq 0$ を満たす任意に固定された A_0, A_1, A_2, T, Q, P に対して収束するという意味である。

この節の始めに与えたベックルント変換群 W_{IV} と照らし合わせると、S_0, S_1, S_2 で生成される W_V の部分群 $W_{V\to IV}$ は $\epsilon \to 0$ のとき W_{IV} に収束することが分かる。ただし $W_{V\to IV}$ が作用する空間は $A_0, A_1, A_2, \varepsilon$ の形式的巾級数を係数とする T, Q, P の有理函数全体からなる体である。

最後にハミルトン系 $P_{V\to IV}$ がどのように表されるか、$W_{V\to IV}$ がそれにどう作用するかを見ておこう。

$$\delta_V = td/dt = (1 + 2\varepsilon T)(2\varepsilon)^{-1} d/dT = (1 + 2\varepsilon T)(2\varepsilon)^{-1} \delta_{IV}$$

であるので $H_{V\to IV} := 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon T)^{-1} H_V$ とおくと $\varepsilon \to 0$ のとき $H_{V\to IV} \to H_{IV}$ であり、ハミルトン系 $P_{V\to IV}$ は

$$\delta_{IV} Q = \{H_{V\to IV}, Q\}, \quad \delta_{IV} P = \{H_{V\to IV}, P\}$$

と表され、$w \in W_{V\to IV}$ に対して

$$\delta_{IV} w(Q) = \left\{\frac{2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon T} w\left(\frac{1 + 2\varepsilon T}{2\varepsilon}\right) w(H_{V\to IV}), w(Q)\right\},$$
$$\delta_{IV} w(P) = \left\{\frac{2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon T} w\left(\frac{1 + 2\varepsilon T}{2\varepsilon}\right) w(H_{V\to IV}), w(P)\right\}$$

が得られる。この最後の結果は前節のものとは異なる。それは δ_V は任意の $w \in W_{V\to IV}$ と可換であるが、δ_{IV} はそうではないからである。

参考文献

[1] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé, Vieweg, 1991.

[2] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, Commun. Math. Phys., **199**(1998), 281–295.

[3] M. Suzuki, N. Tahara and K. Takano, Hierarchy of Bäcklund Transformation Groups of the Painlevé Systems, preprint.

[4] K. Takano, Confluence processes in defining manifolds for Painlevé systems, Tohoku Math. J., **53**(2001), 319–335.